TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 330, Number 1, March 1992

HOMOTOPIE DE L'ESPACE DES EQUIVALENCES D'HOMOTOPIE

GENEVIÈVE DIDIERJEAN

ABSTRACT. The spectral sequence of the self-fiber-homotopy-equivalences of a fibration provides a method to compute the homotopy groups of the space of self-equivalences of a space.

0. INTRODUCTION

Pour un CW complexe de dimension finie X, l'espace des équivalences d'homotopie de X est noté $E(X)$. C'est un sous-espace de l'espace topologique des applications continues de X dans lui-même. L'ensemble des composantes connexes de cet espace est un groupe pour la composition des applications, c'est le groupe d'homotopie des équivalences d'homotopie de X, noté $\mathscr{E}(X)$.

Par différentes techniques, le calcul du groupe $\mathscr{E}(X)$ est possible si X possède de "bonnes" propriétés. Il en est ainsi si X est un H-espace simplement connexe de rang 2 [5, 7, 9, 10], si c'est un H-espace de rang petit [6], si X est un CW complexe n'ayant que peu de cellules [8], ou ayant moins de trois groupes d'homotopie non nuls en dessous de sa dimension [1, 11, 12].

En fait, la suite spectrale développée dans un article précédent [1], fournit des informations sur l'ensemble des groupes d'homotopie de l'espace $E(X)$, espace pointé par l'application identité.

Dans la première partie de ce travail, on construit un algorithme de calcul des groupes d'homotopie de l'espace $E(X)$; ceci à partir de la suite exacte de Gysin obtenue par la suite spectrale des équivalences d'homotopie fibrées. En particulier, cet algorithme fournit, à partir de la décomposition en tour de Postnikov de l'espace X, un algorithme de calcul des groupes $\mathscr{E}(X)$ généralisant les résultats précédents.

Une deuxième partie est consacrée, pour illustrer ce procédé, au calcul de groupes d'homotopie de l'espace $E(X)$ pour X l'espace SU(3) et Sp(2). On y donne de plus le calcul du groupe $\mathscr{E}(X)$ pour un CW complexe X simplement connexe ayant moins de quatre groupes d'homotopie non nuls en dessous de sa dimension.

Je tiens à remercier vivement le département de Mathématiques du "Centro de Investigation y de Estudios Avanzados" de l'I.P.N de Mexico pour son accueil durant l'année scolaire 1986/1987.

Received by the editors October 30, 1987 and, in revised form, October 17, 1989.
1980 *Mathematics Subject Classification* (1985 *Revision*). Primary 55P10, 55Q52; Secondary 55R10, 55T99.

0002-9947/92 $1.00 + $.25 per page

I. Construction de l'algorithme

1. Rappels sur la suite exacte de Gysin des equivalences d'homotopie fibrees. Les notations utilisées ici, sont celles de l'article dans lequel est construit la suite spectrale des équivalences d'homotopie fibrées [1].

Les espaces considérés sont des ensembles simpliciaux, minimaux, de Kan; les fibrés, notés $X \to B$, des fibrés de Kan, minimaux dont la base et la fibre sont connexes et le groupe fondamental de la fibre abélien.

Soit $X \to B$ un fibré, on note $S_B(X)$ l'ensemble simplicial de Kan associé aux applications simpliciales de X dans X induisant l'identité sur la base. Le monoïde des équivalences d'homotopie fibrées, noté $E_B(X)$, est le sous-ensemble simplicial de $S_B(X)$ dont les simplexes sont des équivalences d'homotopie fibrées. L'application identité de l'espace X est prise pour point-base de ce monoïde et on a $\Pi_0(E_B(X)) = \mathscr{E}_B(X)$ le groupe d'homotopie des équivalences d'homotopie fibrées de X.

Soient $X \to B$ un fibré de fibre F, n un entier positif ou nul et $X^n \to B$, le n-ième système de Postnikov fibré du fibré $X \to B$. Let fibrés $X^{n+1} \to X^n$ sont des fibrés dont la fibre est un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\Pi_n(F), n)$. L'opération du groupe $\Pi_1(X)$ sur le groupe $\Pi_n(X)$ est notée t et le n-ième invariant de Postnikov de ce fibré, ξ^n, se trouve dans le groupe de cohomologie de l'espace X^n à valeur dans le système de coefficients locaux défini par cette opération t [3], groupes de cohomologie notés $H_t^{n+1}(X^n, \Pi_n(F))$.

Le sous-groupe des éléments du groupe $\mathrm{Aut}[\Pi_n(F)]$ invariant par l'opération t, est noté $\mathrm{Aut}[\Pi_n(F)]_{\pi_1(X)}$. Ce sous-groupe opère sur $H_t^{n+1}(X^n, \Pi_n(F))$. Le sous-groupe de ce sous-groupe laissant la classe ξ^n invariante sera noté $\mathrm{Aut}[\Pi_n(F)]_{\pi_1(X), \xi^n}$.

Théorème (1.1). *Soit $X \to B$ un fibré de Kan dont la fibre F et la base sont connexes et dont le groupe fondamental de la fibre est abélien. On suppose de plus que la fibre n'a que deux groupes d'homotopie non nuls, $\Pi_i(F) = \Pi_i$, $i = k, m$, avec $k < m$. On a alors:*

$$\Pi_i(E_B(X)) = 0 \quad \textit{pour } i > m.$$
$$\Pi_i(E_B(X)) = H_t^{m-i}(X, \Pi_m) \quad \textit{pour } k < i \leq m.$$

Pour $i < k$ on a la suite exacte

$$\begin{aligned} H_t^{m-k}(X, \Pi_m) &\to \Pi_k(E_B(X)) \to (\Pi_k)_{\pi_1(X)} \to \cdots \\ &\to \Pi_i(E_B(X)) \to H_t^{k-i}(X, \Pi_k) \to H_t^{m-i+1}(X, \Pi_m) \\ &\to \Pi_{i-1}(E_B(X)) \to \cdots \to \Pi_1(E_B(X)) \to H_t^{k-1}(X, \Pi_k) \\ &\to E_1^{m,-m} \to \mathscr{E}_B(X) \to E_1^{k,-k} \to E_1^{m,-m+1}, \end{aligned}$$

avec:

l'application de $H_t^{k-i}(X, \Pi_k)$ dans $H_t^{m-i+1}(X, \Pi_m)$ est la différentielle d_{m-k} de la suite spectrale des équivalences d'homotopie fibrées.

les groupes $E_1^{m,-m}$ *et* $E_1^{k,-k}$ *sont donnés par les suites exactes*

$$0 \to H_t^m(X^m, \Pi_m) \to E_1^{m,-m} \to [\mathrm{Aut}\,\Pi_m]_{\pi_1(X),\xi^m} \to 1,$$

$$0 \to H_t^k(X^k, \Pi_k) \to E_1^{k,-k} \to [\mathrm{Aut}\,\Pi_k]_{\pi_1(B),\xi^k} \to 1.$$

E_1^{m-m+1} *est l'orbite de la classe de* $\xi^{(m)}$ *pour l'opération du groupe des* $X^{(m)}$-*isomorphismes du fibré* $X^{(m+1)} \to X^{(m)}$ *sur le quotient*

$$H^{m+1}(X^{(m)}, \Pi_m)/\,\mathrm{Aut}(\Pi_m).$$

Ces termes sont des ensembles pointés par la classe de l'élément $\xi^{(m)}$. *En particulier, si* $\Pi_1(F) = 0$ *on a l'égalité*:

$$E_1^{m,-m+1} = H_t^{m+1}(X^m, \Pi_m)/\,\mathrm{Aut}[\Pi_m(F)]_{\pi_1(B)}.$$

2. Proposition servant a la construction de l'algorithme. L'algorithme cherché va se déduire du théorème (1.1) et de la proposition suivante:

Proposition (1.2). *Soit* X *un CW complexe de dimension* N. *La fibration* $E(X^{N+n+1}) \to E(X^{N+n})$ *induit, si* $n \geq 1$, *la suite exacte suivante*:

$$\cdots \to H_t^{N-1}(X, \Pi_{N+n}(X)) \to \Pi_{n+1}(E(X^{N+n+1})) \to \Pi_{n+1}(E(X^{N+n}))$$

$$\to H_t^N(X, \Pi_{N+n}(X)) \to \Pi_n(E(X)) \to \Pi_n(E(X^{N+n})) \to 0.$$

Démonstration. Soite $\mathscr{E}_{p+n}^{\infty}$ la fibre de la fibration $E(X) \to E(X^{p+n})$ pour $p > N$ (voir [1, p. 36, Proposition 2.1]) et $n \geq N + r - p$, les groupes d'homotopie $\Pi_r(\mathscr{E}_{p+n}^{\infty})$ sont tous nuls (voir [1, p. 43]). Ainsi, sous ces conditions, les morphismes induits en homotopie par la fibration $E(X) \to E(X^{p+n})$ sont des isomorphismes:

$$\Pi_r(E(X)) = \Pi_r(E(X^{N+r+t})), \qquad \text{pour } t \geq 1.$$

A la fibration $E_{X^{N+n}}(X^{N+n+1}) \to E(X^{N+n+1}) \to E(X^{N+n})$ est associée sa longue suite exacte d'homotopie. Le résultat cherché résulte alors des isomorphismes suivants pour $i \geq 1$ (voir [1, Corollaire (3.1)]):

$$\Pi_i(E_{X^{N+n}}(X^{N+n+1})) = H_t^{N+n-i}(X^{N+n}, \Pi_{N+n}(X)). \quad \square$$

3. Algorithme de calcul des groupes $\Pi_i(E(X))$. Soit X un CW complexe de dimension N, les groupes d'homotopie de X, $\Pi_i(X)$ seront notés Π_i. A l'espace, X, sont associés les espaces de Postnikov X^n et leurs invariants correspondants $[\xi^n] \in H^{n+1}(X^n, \Pi_n)$.

Le principe de cet algorithme est le suivant: Pour pouvoir appliquer le théorème (1.1), on considère les fibration, $X^r \to X^p$ avec $p < r$, associées á la tour de Postnikov de l'espace X, en ne laissant que deux groupes d'homotopie non nuls dans la fibre.

En appliquant successivement le théorème (1.1) aux fibrations $X^r \to X^p$, les suites exactes associées aux fibrations $E(X^r) \to E(X^p)$ et la proposition (1.2), nous donnent une suite finie de suites exactes emboitées.

Plus précisément, on procède comme suit:

Première étape. Soit i le plus petit entier tel que le groupe Π_i soit non nul. Le premier espace de Postnikov non trivial est alors l'espace $X^{i+1} = K(\Pi_i, i)$. De plus on a:

$$\Pi_n(E(X^{i+1})) = \begin{bmatrix} \mathrm{Aut}[\Pi_i] & \text{si } n = 0\,, \\ \Pi_i & \text{si } n = i\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{bmatrix}$$

Deuxième étape. Soit X^{k+1} l'espace de Postnikov tel que cet espace n'ait que deux groupes d'homotopie non nuls Π_k , Π_i $(i < k)$. Le corollaire (3.4) [1, p. 40] et la connaissance des groupes d'homotopie de l'espace $E(K(\Pi_i\,, i))$ nous permet de calculer ceux de l'espace $E(X^{k+1})$:

si $n \neq 0\,, i$, on a:

$$\Pi_n(E(X^{k+1}) = H_t^{k-n}(X\,, \Pi_k)\,, \qquad n > k\,,$$
$$\Pi_k(E(X^{k-1}) = (\Pi_k)_{\pi_1}$$

si $n = i$ on a la suite exacte scindée:

$$0 \to H_t^{k-i}(X\,, \Pi_k) \to \Pi_i(E(X^{k+1})) \to \Pi_i$$

si $n = 0$, ces groupes ont déjá été étudiés dans [1, 11, 12], et on a les résultats suivants:

$$0 \to H_t^k(\Pi_i\,, i\,, \Pi_k) \to \mathscr{E}(X^{k+1}) \to (\mathrm{Aut}[\Pi_i] \oplus [\mathrm{Aut}\,\Pi_k]_{\pi_1})_\xi \to 0$$

avec $\mathrm{Aut}\,\Pi_i$ et $[\mathrm{Aut}\,\Pi_k]_{\pi_1}$ opérant sur $H_t^{k+1}(\Pi_i\,, i\,, \Pi_k)$, $\xi \in H^{k+1}(\Pi_i\,, i\,, \Pi_k)$ et où l'on note $(\mathrm{Aut}[\Pi_i] \oplus \mathrm{Aut}[\Pi_k]_{\pi_i})_\xi$ le stabilisateur de ξ.

En particulier, si $\mathscr{E}^{\#}(X)$ dénote le sous-groupe de $\mathscr{E}(X)$ formé des éléments qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie de X on a: $\mathscr{E}^{\#}(X^{k+1}) = H_t^k(\Pi_i\,, i\,, \Pi_k)$.

Troisième étape. On considère le plus petit entier $m > k$ tel que le fibré $X^{m+1} \to X^{k+1}$ ait une fibre ayant deux groupes d'homotopie non nuls, Π_j, Π_m $(i < k < j < m)$. Le théorème (1.1) s'applique á la fibration $X^{m+1} \to X^{k+1}$ et nous donne la suite exacte (1) suivante:

$$\begin{aligned} \cdots &\to H_t^{j-s-1}(X\,, \Pi_j) \to H_t^{m-s}(X\,, \Pi_m) \to \Pi_s(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) \\ &\to H_t^{j-s}(X\,, \Pi_j) \to \cdots \to \Pi_1(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) \to H_t^{j-1}(X\,, \Pi_j) \\ &\to E_1^{m,-m} \to \mathscr{E}_{X^{k+1}}(X^{m+1}) \to E_1^{j,-j} \to E_1^{m,-m+1}\,. \end{aligned}$$

La fibration $E(X^{m+1}) \to E(X^{k+1})$ a pour fibre $E_{X^{k+1}}(X^{m+1})$. On a donc la suite exacte (2) suivante:

$$\cdots \to \Pi_s(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) \to \Pi_s(E(X^{m+1})) \to \Pi_s(E(X^{k+1})) \to \cdots\,.$$

En regroupant les suites exactes (1) et (2), on peut "calculer" les groupes $\Pi_s(E(X^{m+1}))$; on a les suites exactes emboitées:

si $s \neq i-1$, i et 0, on a:

$$\begin{array}{ccccc} \cdots \to H_t^{k-1-s}(X\,, \Pi_k) & \to \Pi_s(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) & \to \Pi_s(E(X^{m+1})) & \to H_t^{k-s}(X\,, \Pi_k) \to \cdots \\ & \| & & \\ \cdots \to H_t^{j-s-1}(X\,, \Pi_j) & \to H_t^{m-s}(X\,, \Pi_m) & \to \Pi_s(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) & \to H_t^{j-s}(X\,, \Pi_j) \to \cdots\,, \end{array}$$

si $s = i-1$, i, on a:

$$\begin{array}{c} 0 \to H_t^{k-i}(X, \Pi_k) \to \Pi_i(E(X^{k+1})) \to \Pi_i \\ \| \\ H_t^{k-i-1}(X, \Pi_k) \to \Pi_i(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) \to \Pi_i(E(X^{m+1})) \to \Pi_i(E(X^{k+1})) \to \Pi_{i-1}(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) \\ \| \\ H^{m-i}(X, \Pi_m) \to \Pi_i(E_{X^{k+1}}(X^{m+1})) \to H_t^{j-i}(X, \Pi_j) \to \cdots , \end{array}$$

si $s = 0$, on a:

$$\begin{array}{c} 0 \to H_t^k(\Pi_i, i, \Pi_k) \to \mathscr{E}(X^{k+1}) \to (\mathrm{Aut}[\Pi_i] \oplus \mathrm{Aut}[\Pi_k]_{\pi_1})_\xi \to 0 \\ \| \\ \to H_t^{k-1}(X, \Pi_k) \to \mathscr{E}_{X^{k+1}}(X^{m+1}) \to \mathscr{E}(X^{m+1}) \to \mathscr{E}(X^{k+1}) \\ \| \\ \cdots \to E_1^{m,-m} \to \mathscr{E}_{X^{k+1}}(X^{m+1}) \to E_1^{j,-j} \to E_1^{m,-m+1} . \end{array}$$

En particulier, pour le sous-groupe $\mathscr{E}^\#(X)$, en reprenant les notations de [1], on a les suites exactes suivantes:

$$\begin{array}{c} \cdots \to H_t^{k-1}(X, \Pi_k) \to \mathscr{E}^\#_{X^{k+1}}(X^{m+1}) \to \mathscr{E}^\#(X^{m+1}) \to H_t^k(\Pi_i, i, \Pi_k) \\ \| \\ \cdots \to H_t^{j-1}(X, \Pi_j) \to H_t^m(X^m, \Pi_m) \to \mathscr{E}^\#_{X^{k+1}}(X^{m+1}) \to H_t^j(X^j, \Pi_j) . \end{array}$$

Ainsi approchant par ce procédé les groupes d'homotopie de l'espace $E(X^p)$, il est possible de "calculer" ceux de l'espace $E(X^r)$ pour une fibration $X^r \to X^p$ dont la fibre n'a que deux groupes d'homotopie non nuls. On réitère ce procédé jusqu'au cran nécessaire, $N+1$ pour calculer $\mathscr{E}(X)$, $N+n+1$ pour le groupe $\Pi_n(E(X))$, avec $N = \mathrm{dimension}(X)$.

Dernière étape. Pour $n \geq 1$ les groupes d'homotopie $\Pi_n(E(X))$ se déduisent des suites exactes suivantes:

$$H_t^{N-1}(X, \Pi_{N+n-1}) \to \Pi_n(E_{X^{N+n-2}}(X^{N+n})) \to H_t^{N-2}(X, \Pi_{N+n-2}) \to H_t^N(X, \Pi_{N+n-1})$$

(Théorème (1.1))

$$\begin{array}{c} \| \\ \cdots \to \Pi_n(E_{X^{N+n-2}}(X^{N+n})) \to \Pi_n(E(X^{N+n})) \to \Pi_n(E(X^{N+n-2})) \to \cdots \end{array}$$

(suite exacte associee
a la fibration)

$$\cdots \to H_t^N(X, \Pi_{N+n}) \to \Pi_n(E(X)) \to \Pi_n(E(X^{N+n})) \to 0 .$$

(Proposition (1.2))

Le groupe $\Pi_n(E(X^{N+n-2}))$ a été calculé á l'étape précédente; la première ligne donne une évaluation du groupe $\Pi_n(E_{X^{N+n-2}}(X^{N+n}))$. Pour $n = 0$, le groupe $\mathscr{E}(X)$ se déduit des suites exactes suivantes:

$$\begin{array}{c} \cdots \to E_1^{N-1,-N+1} \to \mathscr{E}_{X^{N-2}}(X^N) \to E_1^{N-2,-N+2} \to E_1^{N-1,-N+2} \\ \| \\ \cdots \to \Pi_1(E(X^{N-2})) \to \mathscr{E}_{X^{N-2}}(X^N) \to \mathscr{E}(X^N) \to \mathscr{E}(X^{N-2}) \to \\ \\ \to \Pi_1(E(X^N)) \to \mathscr{E}_{X^N}(X^{N+1}) \to \mathscr{E}(X) \to \mathscr{E}(X^N) \\ \| \\ 0 \to H_t^N(X^N, \Pi_N) \to \mathscr{E}_{X^N}(X^{N+1}) \to \mathrm{Aut}[\Pi_N]_{\pi_1, \xi} \to 0 . \end{array}$$

Le groupe $\mathscr{E}(X^{N-2})$ a été calculé á l'étape précédente; la première ligne donne une évaluation du groupe $\mathscr{E}_{X^{N-2}}(X^N)$ et la dernière du groupe $\mathscr{E}_{X^N}(X^{N+1})$.

II. Application et exemples

1. Cas d'un CW complexe simplement connexe ayant 4 groupes d'homotopie non nuls en dessous de sa dimension. Soit X un CW complexe 1-connexe ayant 4 groupes d'homotopie non nuls entre les crans 2 et $\dim X = N$. On note Π_s les groupes $\Pi_s(X)$, pour $s = i, j, k, m$, $1 < i < j < k < m \leq N$. Dans ce cas le groupe $\mathscr{E}(X)$ (resp. $\mathscr{E}^{\#}(X)$) est isomorphe au groupe $\mathscr{E}(X^{N+1})$ (resp. $\mathscr{E}^{\#}(X^{N+1})$). L'algorithme précédent s'arrête donc á la troisième étape et on a les propositions suivantes:

Proposition (2.1). *Sous ces hypothèses le groupe $\mathscr{E}(X)$ peut être calculer á l'aide des suites exactes suivantes*:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 \to H^j(\Pi_i, i, \Pi_j) \to & \mathscr{E}(X^{j+1}) & \to (\mathrm{Aut}_\xi[\Pi_i] \oplus \mathrm{Aut}[\Pi_j])_\xi \to 0, \\
 & & & & \| & \\
\cdots \to H^{j-1}(X, \Pi_j) & \to & \mathscr{E}_{X^{j+1}}(X^{m+1}) & \to \mathscr{E}(X) \to & \mathscr{E}(X^{j+1}) & \\
 & & \| & & & \\
\cdots \to E_1^{m,-m} & \to & \mathscr{E}_{X^{j+1}}(X^{m+1}) & \to E_1^{k,-k} \to & E_1^{m,-m+1} &
\end{array}$$

où $(\mathrm{Aut}[\Pi_i]$ et $\mathrm{Aut}[\Pi_j])_\xi$ a été définis précédement.

Proposition (2.2). *L'espace X vérifiant toujours les hypothèses précédentes, le groupe $\mathscr{E}^{\#}(X)$ se calcule á partir des suites exactes suivantes*:

$$\begin{array}{ccccc}
 & \cdots \to H^{j-1}(X, \Pi_j) \to & \mathscr{E}^{\#}_{X^{j+1}}(X^{m+1}) & \to \mathscr{E}^{\#}(X) & \to H^j(\Pi_i, i, \Pi_j) \\
 & & \| & & \\
\cdots \to H^{k-1}(X, \Pi_k) \to K^m(X, \Pi_m) \to & & \mathscr{E}^{\#}_{X^{j+1}}(X^{m+1}) & \to K^k(X, \Pi_k) & \to H^{m+1}(X^m, \Pi_m).
\end{array}$$

Où le groupe $K^s(X, \Pi) = H^s(X^s, \Pi) = \mathrm{Ker}\, v \cdot u$ est le noyau du morphisme composé $H^s(X, \Pi)) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(\mathbf{H}_s(X), \Pi) \xrightarrow{v} \mathrm{Hom}(\Pi_s(X), \Pi)$, u étant la projection naturelle et v étant induit par l'application d'Hurewicz (*voir* [1, *Proposition* (2.5)]).

2. Cas de l'espace $\mathrm{SU}(3)$. La dimension de l'espace $X = \mathrm{SU}(3)$ est 8, de plus $\mathrm{SU}(3) = S^3 \cup_\eta e^5 \cup e^8$ avec η un générateur du groupe $\Pi_4(S^3) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ (voir [7]) et ses groupes d'homotopies sont:

$\Pi_1(X) = \Pi_2(X) = \Pi_4(X) = \Pi_7(X) = 0$,
$\Pi_3(X) = \Pi_5(X) = \mathbf{Z}$,
$\Pi_6(X) = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$,
$\Pi_8(X) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$,
$\Pi_9(X) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Cet espace a 4 groupes d'homotopie non nuls en dessous de sa dimension. On va utiliser l'algorithme précédent. L'espace X est fibré sur S^5 de fibre S^3, la suite spectrale de Serre dégénère et l'anneau de cohomologie dans un anneau unitaire R est l'algèbre extérieure sur R, $\Lambda_R[x_3, x_5]$, ayant pour générateurs x_3 et x_5, ces éléments sont les générateurs des modules $H^3(X, R)$ et $H^5(X, R)$ respectivement.

Théorème (2.3). *Pour l'espace* $\mathrm{SU}(3)$ *on a*:
$\mathscr{E}^{\#}(\mathrm{SU}(3)) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$,
la suite exacte:

$$0 \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \mathscr{E}(X) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0\,.$$

Remarque. On retrouve pour le groupe $\mathscr{E}(\mathrm{SU}(3))$ les résultats de [7].

Démonstration. On utilise, pour le calcul de $\mathscr{E}^{\#}(\mathrm{SU}(3))$, la proposition (2.2) précédente. Le premier espace de Postnikov non trivial est l'espace X^4, isomorphe á l'espace $K(\mathbf{Z}, 3)$. L'espace X étant de dimension 8, on a donc $\mathscr{E}^{\#}(X) = \mathscr{E}^{\#}(X^9)$ et ainsi:

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & & \to H^4(X, \mathbf{Z}) & \to \mathscr{E}^{\#}_{X^6}(X^9) \to & \mathscr{E}^{\#}(X) & \to H^5(\mathbf{Z}, 3, \mathbf{Z}) & & \\ & & & & \| & & & \\ \cdots \to H^5(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} & K^8(X, \Pi_8) \to & & & \mathscr{E}^{\#}_{X^6}(X^9) \to & K^6(X^6, \Pi_6) \to & H^9(X^8, \Pi_8)\,. \end{array}$$

Dans ce diagramme, $H^4(\mathrm{SU}(3), \mathbf{Z}) = 0$ et $H^5(\mathbf{Z}, 3, \mathbf{Z}) = 0$. On a donc $\mathscr{E}^{\#}_{X^6}(X^9) = \mathscr{E}^{\#}(X)$ et on va, dans les lemmes suivants, pour terminer le calcul de $\mathscr{E}^{\#}(X)$ déterminer les groupes $K^8(X, \Pi_8)$, $K^6(X, \Pi_6)$ (lemme 1) et montrer la nullité du morphisme δ (lemme 2).

Lemme 1. $K^8(X, \Pi_8) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ *et* $K^6(X, \Pi_6) = 0$.

Démonstration. Le groupe $K^8(X, \Pi_8)$ est le noyau du composé naturel:

$$H^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) \xrightarrow{u} \mathrm{Hom}(H_8(X), \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) \xrightarrow{v} \mathrm{Hom}(\Pi_8(X), \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}).$$

L'application u est un isomorphisme car le groupe $H_7(X)$ est nul. L'application v est nulle car $H_8(X) = \mathbf{Z}$ et $\Pi_8(X) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. On a donc bien $K^8(X, \Pi_8) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

Le groupe $H^6(X, \Pi_6)$ étant nul, son sous groupe $K^6(X^6, \Pi_6)$ est nul.

Lemme 2. *L'application* $\delta\colon H^5(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \to H^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$, *induite par la différentielle de la suite spectrale est nulle.*

Démonstration. La différentielle d_2 est l'homomorphisme bord δ de la suite exacte d'homotopie associée á la fibration $E^{\#}_{X^8}(X^9) \to E^{\#}_{X^6}(X^9) \to E^{\#}_{X^6}(X^8)$:

$$\delta\colon \Pi_{i+1}(E^{\#}_{X^6}(X^8)) \to \Pi_i(E^{\#}_{X^8}(X^9))\,.$$

Montrons que ce morphisme est nul: Comme $\Pi_1(\mathrm{SU}(3))$ et $\Pi_2(\mathrm{SU}(3))$ sont nuls, cette application correspond à l'opération d'Eilenberg associée à l'invariant de Postnikov $\xi^8 \in H^9(X^8, \Pi_8) = \Pi_8$. Cette opération, notée $O_\xi\colon H^5(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \to H^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$, est nulle car l'espace X est fibré sur S^5 de fibre S^3; on a le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} H^5(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) & \xrightarrow{O_\xi} & H^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) \\ \simeq\downarrow & & \uparrow \\ H^5(S^5, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) & \longrightarrow & H^8(S^5, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) = 0\,. \end{array}$$

Ceci termine le calcul de $\mathscr{E}^{\#}(\mathrm{SU}(3))$.

Pour celui de $\mathscr{E}(\mathrm{SU}(3))$, on utilise la proposition (2.1):

$$\begin{array}{c} 0 \to H^5(\mathbf{Z}, 3, \mathbf{Z}) \to \mathscr{E}(X^6) \to \mathrm{Aut}_\xi[\mathbf{Z}] \oplus [\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}]_\xi \to 0 \\ \| \\ \to H^4(X, \mathbf{Z}) \to \mathscr{E}_{X^6}(X^9) \to \mathscr{E}(X) \to \mathscr{E}(X^6) \\ \| \\ H^5(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} E_1^{8,-8} \to \mathscr{E}_{X^6}(X^9) \to E_1^{6,-6} \to E_1^{8,-7}. \end{array}$$

Or

$$H^5(\mathbf{Z}, 3, \mathbf{Z}) = 0, \quad H^4(X, \mathbf{Z}) = 0.$$

Pour terminer, il faut donc calculer les groupes $\mathscr{E}(X^6)$, $\mathscr{E}_{X^6}(X^9)$ (lemme 4), et montrer la surjectivité de l'application, induite par la fibration, $\mathscr{E}(X) \to \mathscr{E}(X^6)$ (lemme 3).

Lemme 3. *L'application $\mathscr{E}(X) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est surjective, cette application étant induite par la fibration $X \to X^6$.*

Démonstration. Dans le lemme 4 suivant, on va démontrer que le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est isomorphe au groupe $\mathscr{E}(X^6)$. Le lemme 1 nous permet de démontrer que le groupe $\mathscr{E}(X^6)$ est isomorphe au groupe $\mathscr{E}(X^8)$. Il suffit donc de démontrer que l'application $\mathscr{E}(X^9) \to \mathscr{E}(X^8)$ est surjective. L'invariant de Postnikov du fibré $X^9 \to X^8$ est représenté par une application: $X^8 \to K(\Pi_8, 9)$ à un automorphisme près du groupe Π_8 [4]. Sa classe de cohomologie, $[\xi]$, peut s'interprêter comme suit [2, p. 131]: Le groupe $\mathrm{Hom}(\Pi_8, \Pi_8)$ est isomorphe au groupe $H^9((X^8, X), \Pi_8)$, notons $[X^8, X]$ l'image par cet isomorphisme de l'identité du groupe Π_8. Si i: $H^9((X^8, X), \Pi_8) \to H^9(X^8, \Pi_8)$ désigne le morphisme induit par l'inclusion de l'espace X^8 dans la paire (X^8, X), on a:

$$i([X^8, X]) = [\xi].$$

Soit f: $X^8 \to X^8$ une équivalence d'homotopie. La classe de ξ et de ξf ne diffèrent donc que par un automorphisme du groupe Π_8. Let fibrés image-réciproque par ξ et ξf du fibré universel sur l'espace $K(\Pi_8, 9)$ sont donc X^8-isomorphes au fibré $X^9 \to X^8$ [4]. On associe à tout 0-simplexe f de $E(X^8)$ un 0-simplexe de $E(X^9)$ qui se projette sur f.

Lemme 4. $\mathscr{E}(X^6) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ *et* $\mathscr{E}_{X^6}(X^9) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

Démonstration. Tout d'abord démontrons que $\mathscr{E}(X^6) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$: L'espace X^6 est isomorphe au fibré $K(\mathbf{Z}, 5) \times_\tau K(\mathbf{Z}, 3)$, avec $[\tau]$ l'élément non trivial de $H^6(\mathbf{Z}, 3, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Le groupe $[\mathrm{Aut}\,\mathbf{Z}]_\xi$ est donc isomorphe au groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ ainsi que le groupe $\mathrm{Aut}_\xi[\mathbf{Z}]$.

Pour démontrer la deuxième partie du lemme, il suffit de remarquer que $\Pi_1(E_{X^6}(X^9)) = \Pi_1(E^{\#}_{X^6}(X^9))$ et que $K^8(X, \Pi_8) = E_1^{8,-8}$, $K^6(X, \Pi_6) = E_1^{6,-6}$. Montrons ces deux derniers isomorphismes:

Le groupe $E_1^{8,-8}$ est donné par la suite exacte:

$$0 \to K^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) \to E_1^{8,-8} \to \mathrm{Aut}[\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}]_{\xi^8} \to 0.$$

Le groupe $K^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$ est isomorphe á $H^8(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ (lemme 1). Il reste á calculer le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}]_{\xi^8}$ pour connaître $E_1^{8,-8}$. On a la suite exacte de la paire (X^8, X), avec $\Pi_8 = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$:

$$H^8(X^8, \mathbf{Z}) = H^8(X, \Pi_8) \xrightarrow{0} H^9((X^8, X), \Pi_8)$$
$$\xrightarrow{i} H^9(X^8, \Pi_8) \to H^9(X, \Pi_8) = 0.$$

L'homomorphisme i est un isomorphisme et il n'y a pas d'autre automorphisme que l'identité qui laisse la classe $[\xi]$ invariante, car cette classe $[\xi]$ est l'image de l'identité de Π_8 (lemme 3). Ceci démontre l'égalité $E_1^{8,-8} = K^8(X, \Pi_8) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

On démontre comme précédement que le seul automorphisme du groupe $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ qui laisse la classe $[\xi]$ invariante est l'identité de $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$. On a donc également $E_1^{6,-6} = K^6(X, \Pi_6) = 0$. Ceci, termine la démonstration du théorème 2.3. □

Théorème (2.4). *La suite suivante est exacte*:

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \Pi_1(E(\mathrm{SU}(3))) \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to 0.$$

L'application de $\mathbf{Z}$ *dans* $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ *étant le morphisme "bord" induit par le fibré* $E_{X^9}(X^{10}) \to E(X^{10}) \to E(X^9)$.

Démonstration. Le groupe Π_{10} étant isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ on a $\Pi_1(E_{X^9}(X^{10})) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ et les groupes $\Pi_0(E_{X^9}(X^{10}))$ et $\Pi_2(E_{X^9}(X^{10}))$ étant nuls la suite exacte associée à la fibration $E_{X^9}(X^{10}) \to E(X^{10}) \to E(X^9)$, nous donne le résultat une fois connus les groupes d'homotopie de $E(X^9)$. On va donc calculer les groupes d'homotopie de cet espace.

Proposition (2.5). *Les groupes d'homotopie de l'espace* $E(X^9)$ *sont donnés par*:
la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \mathscr{E}(X^9) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0;$$

$\Pi_1(E(X^9)) = \Pi_6(E(X^9)) = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\Pi_2(E(X^9)) = \mathbf{Z}$;
$\Pi_3(E(X^9)) = \mathbf{Z} \oplus \Pi_3(E_{X^6}(X^9))$, *avec*

$$0 \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \Pi_3(E_{X^6}(X^9)) \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to 0;$$

$\Pi_5(E(X^9)) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, $\Pi_8(E(X^9)) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$;
$\Pi_i(E(X^9)) = 0$ *sinon.*

Démonstration. Le fibré $X^9 \to X^6$ a une fibre ayant deux groupes d'homotopie non nuls, $\Pi_6 = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ et $\Pi_8 = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. La proposition est alors une conséquence du calcul des groupes d'homotopie de l'espace $E_{X^6}(X^9)$ et de la nullité de la différentielle $\Pi_2(E_{X^4}(X^6)) \to \Pi_1(E_{X^6}(X^8))$ (démonstration analogue au lemme 2 précédent).

Lemme. $\mathscr{E}_{X^6}(X^9) = \Pi_5(E_{X^5}(X^9)) = \Pi_8(E_{X^6}(X^9)) = \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$,
$\Pi_1(E_{X^6}(X^9)) = \Pi_6(E_{X^6}(X^9)) = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$,
la suite exacte suivante:

$$0 \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \Pi_3(E_{X^6}(X^9)) \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to 0,$$

$\Pi_i(E_{X^6}(X^9)) = 0$ *sinon.*

Démonstration. Les lemmes précédents nous donnent le calcul de $\mathscr{E}_{X^6}(X^9)$; pour les autres groupes, il suffit de remarquer que le groupe $H^{8-i}(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$

(respectivement $H^{6-i}(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$) est égal à $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, si $i = 8, 5, 3$, et à 0 sinon (resp. $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, si $i = 6, 3, 1$, et 0 sinon) et le lemme 3 nous a montré la nullité du morphisme δ. Le théorème (1.1) donne la longue suite exacte:

$$\begin{gathered} \cdots \to H^{8-i}(X, \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}) \to \Pi_i(E_{X^6}(X^9)) \to H^{6-i}(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \to \cdots \\ \to H^5(X, \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}) \xrightarrow{\delta} E_1^{8,-8} \to \mathscr{E}_{X^6}(X^9) \to E_1^{6,-6} \to E_1^{8,-7}. \end{gathered}$$

Ce qui termine la demonstration de la proposition (2.5). □

De même on démontre:

Théorème (2.6). *Pour* $X = \mathrm{SU}(3)$ *on a les résultats suivants*:

$\Pi_2(E(\mathrm{SU}(3)))$: $\Pi_2(E(X)) = \mathbf{Z} \oplus \Pi_2(E_{X^6}(X^{11}))$ *avec*:

(a) $$0 \to \Pi_3(E_{X^6}(X^{11})) \to \Pi_3(E_{X^6}(X^9)) \to \mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \to \Pi_2(E_{X^6}(X^{11})) \to 0,$$

(b) $$0 \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \Pi_3(E_{X^6}(X^9)) \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to 0;$$

$\Pi_3(E(\mathrm{SU}(3)))$: $\Pi_3(E(X)) = \mathbf{Z} \oplus \Pi_3(E_{X^6}(X^{12}))$, *avec* (a), (b) *et*:

(c) $$0 \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \to \Pi_3(E_{X^6}(X^{12})) \to \Pi_3(E_{X^6}(X^9)) \to 0;$$

$\Pi_4(E(\mathrm{SU}(3)))$: $\Pi_4(E(X)) = \Pi_4(E_{X^6}(X^{13}))$, *avec*:

(d) $$\begin{gathered} 0 \to \Pi_5(E_{X^6}(X^{13})) \to \Pi_5(E_{X^6}(X^{11})) \to \mathbf{Z}/60\mathbf{Z} \\ \to \Pi_4(E_{X^6}(X^{13})) \to \Pi_4(E_{X^6}(X^{11})) \to 0; \end{gathered}$$

(e) $$\Pi_4(E_{X^6}(X^{11})) \simeq \Pi_4(E_{X^6}(X^{10}))$$

et

$$0 \to \Pi_5(E_{X^6}(X^{10})) \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \to \Pi_4(E_{X^6}(X^{10})) \to 0;$$

(f) $$0 \to \mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \to \Pi_5(X_{X^6}(X^{11})) \to \Pi_5(E_{X^6}(X^{10})) \to 0;$$

$\Pi_5(E(\mathrm{SU}(3)))$: $\Pi_5(E(X)) = \mathbf{Z} \oplus \Pi_5(E_{X^6}(X^{14}))$, *avec* (d), (e), (f), *et*:

(g) $$\begin{gathered} 0 \to \Pi_6(E_{X^6}(X^{14})) \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \\ \to \Pi_5(E_{X^6}(X^{14})) \to \Pi_5(E_{X^6}(X^{13})) \to 0. \end{gathered}$$

3. Cas de l'espace $\mathrm{Sp}(2)$. La dimension de l'espace $X = \mathrm{Sp}(2)$ est 10 et ses groupes d'homotopie jusqu'au cran 10 sont:

$\Pi_1(X) = \Pi_2(X) = \Pi_6(X) = \Pi_8(X) = \Pi_9(X) = 0$,
$\Pi_3(X) = \Pi_7(X) = \mathbf{Z}$,
$\Pi_4(X) = \Pi_5(X) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$,
$\Pi_{10}(X) = \mathbf{Z}/120\mathbf{Z}$.

Cet espace a 5 groupes d'homotopie non nuls en dessous de sa dimension.

De plus, l'espace X est fibré sur S^7 de fibre S^3. Son algèbre de cohomologie est isomorphe á l'algèbre extérieure sur R, $\Lambda_R[x_3, x_7]$, ayant pour générateurs x_3 et x_7, ces éléments sont les générateurs des modules $H^3(X, R)$ et $H^7(X, R)$ respectivement.

Pour calculer les groupes d'homotopie du monoide $E(X)$, on va considérer l'espace $X^4 = K(\mathbf{Z}, 3)$, puis les fibrations $X^7 \to X^4$, $X^{11} \to X^7$. Ainsi grâce à l'algorithme précédent on arrive aux résultats:

Théoréme (2.7). *Pour l'espace* $X = \mathrm{Sp}(2)$, *on a les résultats suivants*:

$\Pi_0(E(\mathrm{Sp}(2))) = \mathscr{E}(X)\colon\ 0 \to \mathbf{Z}/120\mathbf{Z} \to \mathscr{E}(X) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0$;

$\Pi_1(E(\mathrm{Sp}(2)))\colon\ \Pi_1(E(\mathrm{Sp}(2))) = \Pi_1(E(X^{12}))$,

$$0 \to \Pi_2(E(X^{12})) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \Pi_1(E(X^{12})) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0;$$

$\Pi_2(E(\mathrm{Sp}(2)))\colon\ \Pi_2(E(\mathrm{Sp}(2))) = \Pi_2(E(X^{13}))$,

$$\text{(a)} \qquad 0 \to \Pi_2(E_{X^{10}}(X^{13})) \to \Pi_2(E(\mathrm{Sp}(2))) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0,$$

$$\text{(b)} \quad 0 \to \Pi_3(E_{X^{10}}(X^{13})) \to \mathbf{Z}/120\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \Pi_2(E_{X^{10}}(X^{13})) \to 0;$$

$\Pi_3(E(\mathrm{Sp}(2)))\colon\ \Pi_3(E(\mathrm{Sp}(2))) = \mathbf{Z} \oplus \Pi_3(E_{X^{10}}(X^{14}))$, *avec* (b) *et*:

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} 0 \to \Pi_4(E_{X^{10}})) \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \Pi_3(E_{X^{10}}(X^{14})) \\ \to \Pi_3(E_{X^{10}}(X^{13})) \to 0; \end{aligned}$$

$\Pi_4(E(\mathrm{Sp}(2))))\colon\ \Pi_4(E(\mathrm{Sp}(2))) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \Pi_4(E_{X^{10}}(X^{15}))$ *avec* (b), (c), *et*:

(d)

$$\begin{array}{r} 0 \to \Pi_5(E_{X^{10}}(X^{15})) \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/1680\mathbf{Z} \to \Pi_4(E_{X^{10}}(X^{15})) \\ \downarrow \qquad\qquad \\ \Pi_4(E_{X^{10}}(X^{14})) \to 0; \end{array}$$

$\Pi_5(E(\mathrm{Sp}(2)))\colon\ \Pi_5(E(\mathrm{Sp}(2))) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \Pi_5(E_{X^{10}}(X^{15}))$.

Remarque. On retrouve pour le groupe $\mathscr{E}(\mathrm{Sp}(2))$ le résultat de [9] et de [7].

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Didierjean, *Homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie fibrées*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **35** (1985), 33–47.
2. P. A. Griffiths et J. W. Morgan, *Rational homotopy theory and differential forms*, Progr. Math. **16** (1981).
3. A. Legrand, *Homotopie des espaces de section*, Lecture Notes in Math., vol. 941, Springer-Verlag, 1981.
4. J. P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.
5. M. Mimura et N. Sawashita, *On the group of self-homotopy equivalences of H-spaces of rank* 2, J. Math. Kyoto Univ. **21** (1981), 331–349.
6. S. Oka, *On the group of self-homotopy equivalences of H-spaces of low rank.* I, II, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A Math. **35** (1981), 247–282 et 307–323.
7. S. Oka, N. Sawashita, et M. Sugawara, *On the group of self-equivalences of a mapping cone*, Hiroshima Math. J. **4** (1974), 9–28.
8. J. W. Rutter, *The group of homotopy self-equivalence classes of C.W. complexes*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **93** (1983), 275–293.
9. ——, *The group of self-homotopy equivalences of principal three sphere bundles over the seven sphere*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **78** (1978), 303–311.
10. N. Sawashita, *On the group of self-equivalences of the product of spheres*, Hiroshima Math. J. **5** (1975), 69–86.
11. W. Shih, *On the group* $\mathscr{E}(X)$ *of homotopy equivalence maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **492** (1964), 361–365.
12. K. Tsukiyama, *Self homotopy-equivalences of a space with two non-vanishing homotopy group*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 134–138.

I.R.M.A., Université Louis Pasteur, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France